Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N. 2, 199-221

Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages

Françoise Dal'bo

Resumé. Nons nous intéressons au spectre des longueurs associé à une variété de courbure négative. Nous démontrons que le spectre des longueurs d'une surface n'est pas inclus dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Nous comparons également le spectre des longueurs de différentes structures Riemanniennes sur une même variété.

Mots Clefs: groupes, spectre des longueurs, surface, Schottky.

Abstract. This paper deals with the length spectrum associated to a negatively curved manifold. In particular we prove that the length spectrum of a surface is not included in a discret subgroup of $\mathbb{R}$. We also compare the length spectrum for different Riemannian structures.

Keywords: group, length spectrum, surface, Schottky.

0. Introduction

Une surface de *Hadamard pincée* S est une surface Riemannienne connexe simplement connexe complète dont la courbure sectionnelle K est normalisée par $\sup K = -1$. Une telle surface admet une compactification géométrique naturelle, on note $S(\infty)$ son bord. L'action d'une isométrie g de S se prolonge en une action par homéomorphisme sur $S(\infty)$. Si g fixe exactement deux points g^- et g^+ appartenant à $S(\infty)$, on dit que g est *hyperbolique.* Dans ce cas g agit sur la géodésique d'extrémités g^-, g^+ par translation et on note $\ell(g)$ sa longueur de translation. Un group d'isométries G non élémentaire est *fuchsien* si son action sur S est propre, libre et discontinue. Soit $\mathcal{L}(G)$ la collection des longueurs des géodésiques fermées de S/G, cet ensemble est *aritmétique* s'il est inclus dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. La question de l'arithméticité du spectre des longueurs $\mathcal{L}(G)$ est liée à des pro-

Received 10 July 1998.

priétés du flot géodésique sur la *partie récurrente* Ω du fibré unitaire tangent de S/G. Plus précisément si le flot géodésique en restriction à Ω est *topologiquement mélangeant* alors $\mathcal{L}(G)$ n'est pas arithmétique. La réciproque est vraie si Ω est compact, on dit dans ce cas que G est *convexe-cocompact.* Nous démontrons la

2.1. Proposition. *Si G est un groupe fuchsien alors $\mathcal{L}(G)$ n'est pas arithmétique.*

Cette proposition ajoutée aux résultats de Parry-Pollicott [**P.P**] entraîne que si G est convexe-cocompact, le nombre de géodésiques fermées sur S/G de longueur $\leq t$ est équivalent, quand t tend vers $+\infty$, à $e^{\delta_G t}/\delta_G t$, où δ_G représente l'exposant critique de la *série de Poincaré*

$$\sum_{g\in G} e^{-sd(0,g(0))}.$$

Considérons deux groupes fuchsiens *géométriquement finis* G_1, G_2 agissant respectivement sur deux surfaces de Hadamard pincées S_1, S_2. Ces groupes sont *ρ-fortement isomorphes* s'il existe un isomorphisme $G_1 \xrightarrow{\rho} G_2$ conservant le type de chaque isométrie. Les surfaces $M_1 = S_1/G_1$ et $M_2 = S_2/G_2$ ont *même spectre marqué des longueurs* lorsque $\ell(g) = \ell(\rho(g))$ pour toute transformation hyperbolique $g \in G_1$. Si M_1 et M_2 sont compactes ou si leur courbure est -1 alors M_1 et M_2 sont isométriques si et seulement si elles ont même spectre marqué des longueurs $[O_2][K]$. Nous introduisons la notion de *dépendance* entre $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ qui correspond à l'existence de deux réels a, b non tous les deux nuls tels que $a\ell(g)+b\ell(\rho(g)) \in \mathbb{Z}$ pour toute transformation hyperbolique $g \in G_1$.

Propositions 3.1 et 3.3. *Si M_1 et M_2 sont compactes ou si ces deux surfaces sont de courbure -1 alors $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont dépendants si et seulement si M_1 et M_2 sont isométriques.*

Supposons que M_1 et M_2 soient compactes et qu'il existe deux transformations hyperboliques g, h dans G_1 vérifiant $\ell(g) > \ell(\rho(g))$ et $\ell(h) < \ell(\rho(h))$. Ceci est le cas par exemple si M_1 et M_2 sont de courbure -1. Sous ces hypothèses, on déduit de la proposition précédente et des résultats de Schwarz-Sharp [**S-S**] que pour ϵ fixé dans R_*^+ il existe

$0 < \alpha \leq 1$ tel que le nombre de classes de conjugaison de transformations hyperboliques g dans G_1 vérifiant $t \leq \ell(g) \leq t + \epsilon$ et $t \leq \ell(\rho(g)) \leq t + \epsilon$ est équivalent à $e^{\alpha t}/t^{3/2}$ quand t tend vers $+\infty$.

Nous sortons à présent du cadre des surfaces. Considérons deux transformations hyperboliques g_1, g_2 agissant sur une variété de Hadamard pincée X et engendrant un *groupe de Schottky.*

4.1. Lemme de comparaison entre longueur géométrique et combinatoire. *Soit $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ un groupe de Schottky satisfaisant la condition (*), il existe $d > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout mot fortement réduit $w = w_1^{n_1} \dots w_p^{n_p}$*

$$\left| \ell(\omega) - \sum_{i=1}^{p} n_i \ell(\omega_i) \right| \leq d \times p.$$

Soient G_1, G_2 deux groupes d'isométries non élémentaires agissant proprement discontinûment et librement sur deux variétés de Hadamard pincées X_1 et X_2. Supposons que G_1 et G_2 soient ρ-fortement isomorphes et notons $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$ l'ensemble des $\ell(\rho(g))/\ell(g)$ où g parcourt l'ensemble des transformations hyperboliques de G_1. On déduit du lemme précédent le

4.2. Corollaire. *L'adhérence de $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$.*

Nous montrons que dans certains cas l'adhérence de $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$ est un intervalle $[A, B] \subset \mathbb{R}^*$ où A et B appartiennent à $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$.

I. Birapport et spectre des longueurs

Soient x, y deux points d'une surface de Hadamard pincée S et $\xi \in S(\infty)$, on note $H_{x,\xi}$ l'*horicycle* centré en ξ passant par x et $B_\xi(x, y)$ la distance algébrique entre $H_{x,\xi}$ et $H_{y,\xi}$ comptée positivement si y appartient à l'intérieur de $H_{x,\xi}$ et négativement sinon. Fixons $O \in S$, le *produit de Gromov* $(\xi|\xi')$ défini sur $S(\infty) \times S(\infty)$ pour $\xi \neq \xi'$ est égal à la moitié de la longueur du segment d'extrémités $H_{0,\xi} \cap (\xi, \xi')$ et $H_{0,\xi'} \cap (\xi, \xi')$ (voir fig. 1).

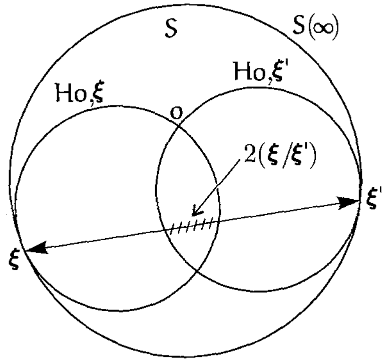

Figure 1

Théorème [Bo]. 1) *L'application* $S^2(\infty) \xrightarrow{D} \mathbb{R}^*$ *définie par* $D(\xi,\xi') = e^{-(\xi|\xi')}$ *si* $\xi \neq \xi'$ *et* 0 *sinon, est une distance.*

2) *Soient* g *une isométrie de* S *et* $\xi \in S(\infty)$, *notons*

$$|g'(\xi)| = e^{B_\xi(0,g^{-1}(0))} ,$$

la relation de conformité suivante est vérifiée

$$D(g(\xi),g(\xi')) = |g'(\xi)|^{1/2}|g'(\xi')|^{1/2}D(\xi,\xi') . \qquad \text{(R1)}$$

On définit le birapport de 4 points distincts ξ,ξ',η,η' de $S(\infty)$ par:

$$[\xi,\xi',\eta,\eta'] = \frac{D(\xi,\eta)}{D(\xi,\eta')}\frac{D(\xi',\eta')}{D(\xi',\eta)} .$$

Considérons une transformation hyperbolique g, notons g^+, g^- ses points fixes respectivement attractifs et répulsifs et $\ell(g)$ la distance d'un point x quelconque de (g^-g^+) à $g(x)$. Remarquons que pour $\epsilon = \{\pm\}$ on a:

$$|g'(g^\epsilon)| = e^{\epsilon\ell(g)} . \qquad \text{(R2)}$$

On déduit des relations (R_1) et (R_2) le:

1.1. Lemme [$\mathbf{O_1}$]. *Si* g *est une transformation hyperbolique et si* $\xi \in S(\infty) - \{g^\pm\}$ *alors* $e^{\ell(g)} = [g^-,g^+,g(\xi),\xi]$.

Le lemme suivant est dû à I. Kim [**K**] et J.-P. Otal [**O1**].

1.2. Lemme [K] [O$_1$]. *Si g_1 et g_2 sont deux transformations hyperboliques n'ayant pas de point fixe en commun alors*

$$[g_1^-, g_2^-, g_1^+, g_2^+] = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}(\ell(g_1^n)+\ell(g_2^n)-\ell(g_1^n g_2^n))}$$

Démonstration. Pour n assez grand, $g_1^n g_2^n$ est une transformation hyperbolique, notons $\xi_n = (g_1^n g_2^n)^+$. Les égalités suivantes se déduisent des relations (R_1) et (R_2):

$$\begin{aligned} e^{\ell(g_1^n)+\ell(g_2^n)-\ell(g_1^n g_2^n)} &= \left|(g_1^{n'})(g_1^-)\right|\left|(g_2^{n'})(g_2^-)\right|\left|(g_1^n g_2^n)'(\xi_n)\right| \\ &= \left|(g_1^{n'})(g_1^-)\right|\left|(g_1^{n'})(g_2^n(\xi_n))\right|\left|g_2^{n'}(g_2^-)\right|\left|g_2^{n'}(\xi_n)\right| \\ &= \frac{D^2(g_1^-, \xi_n)}{D^2(g_1^-, g_2^n(\xi_n))} \times \frac{D^2(g_2^-, g_2^n(\xi_n))}{D^2(g_2^-, \xi_n)} . \end{aligned}$$

On achève la démonstration de ce lemme en remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = g_1^+$ et $\lim_{n\to+\infty} g_2^n(\xi_n) = g_2^+$. □

Considérons un grupe fuchsien G agissant sur S, notons $L(G)$ son ensemble limite $\overline{G0} \cap S(\infty)$ et $D(G) = \{\ell(a)+\ell(b)-\ell(ab)/$ où a et b sont des transformations hyperboliques de G sans point fixe commun$\}$. On déduit du lemme précédent le

1.3. Corollaire. *Si $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont des points distincts de $L(G)$ alors*

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] \in e^{\overline{\frac{D(G)}{2}}} .$$

Démonstration. Supposons pour commencer que chaque ξ_i soit le point fixe attractif d'une transformation hyperbolique $g_i \in G$. Pour N grand, les groupes $\langle g_1^N, g_3^N\rangle$ et $\langle g_2^N, g_4^N\rangle$ sont des groupes de Schottky ([**D-P**]). Soit $k \in \mathbb{N}^*$, notons $r_k = g_3^{Nk} g_1^{-Nk}$ et $s_k = g_4^{Nk} g_2^{-Nk}$. D'après le lemme 1.2, on a

$$[r_k^-, s_k^-, r_k^+, s_k^+] \in e^{\overline{\frac{D(G)}{2}}} ,$$

le birapport étant continu on obtient

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] \in e^{\overline{\frac{D(G)}{2}}} .$$

Si maintenant les ξ_i sont quelconques, l'ensemble limite étant le plus petit fermé G-invariant de $S(\infty)$, il existe pour chaque $i = 1, \dots, 4$

une suite $(g_{in}^{+})_{n\geq 1}$ de points attractifs de transformations hyperboliques $g_{in} \in G$ convergeant vers ξ_i, ceci nous ramène au cas précédent. □

1.4. Remarque. $0 \in \overline{D(G)}$.

En effet soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L(G)$ et $(\xi_n)_{n\geq 4}$ une suite de $L(G)$ convergeant vers ξ_1. On a

$$\lim_{n\to\infty} [\xi_n, \xi_1, \xi_2, \xi_3] = [\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3] = 1 \ .$$

D'après le lemme 1.3, $[\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3] \in e^{\frac{\overline{D(G)}}{2}}$ donc $0 \in \overline{D(G)}$. □

On appelle *spectre des longueurs* de $S_{/G}$ la collection des longueurs des géodésiques fermées de $S_{/G}$. Cet ensemble, noté $\mathcal{L}(G)$, peut être encore défini comme l'ensemble des $\ell(g)$ où g parcourt les transformations hyperboliques de G. Le lemme 1.1 montre que $\mathcal{L}(G)$ peut se déduire du birapport sur $L^4(G)$. En utilisant ce lemme et le corollaire 1.3, on obtient le

1.5. Corollaire. *Le spectre des longueurs $\mathcal{L}(G)$ est inclus dans $\frac{\overline{D(G)}}{2}$.*

II. Non arithméticité du spectre et comptage des géodésiques fermées

Notons M la surface $S_{/G}$. Soient $C: \mathbb{R} \to S$ une géodésique de S paramétrée par longueur d'arcs et $\overrightarrow{C}(t)$ le vecteur tangent en $C(t)$. La projection sur le fibré unitaire tangent T^1M de l'ensemble des couples $(C(t), \overrightarrow{C}(t))$ où C parcourt toutes les géodésiques de S dont les extrémités appartiennent à l'ensemble limite de G, correspond à l'*ensemble des points récurrents* de T^1M pour le flot géodésique $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$. On note Ω cet ensemble. Supposons que $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ en restriction à Ω soit *topologiquement mélangeant*, dans ce cas quelque soient U et V ouverts de Ω, il existe $T > 0$ tel que $g_t(U) \cap V \neq \phi$ pour $t > T$. En appliquant cette propriété à $U = V$ et en utilisant le fait qu'un segment géodésique presque fermé est *pisté* par une géodésique fermée (lemme de fermeture voir par exemple [**L**]), on obtient pour $\epsilon > 0$, l'existence d'un $T_\epsilon > 0$ tel que $[t-\epsilon, t+\epsilon] \cap \mathcal{L}(G) \neq \phi$ pour tout $t > T_\epsilon$. On vient de montrer que si $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est topologiquement mélangeant alors $\mathcal{L}(G)$ n'est pas inclus dans un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. On dit alors que $\mathcal{L}(G)$ n'est pas *arithmétique.*

Quelquefois apparaît dans la définition de l'arithméticité de $\mathcal{L}(G)$ l'existence de $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N} + b$, la remarque 1.4 entraıne que nécessairement $b \in a\mathbb{N}$.

Si Ω est compact, c'est-à-dire si G est *convexe-cocompact,* la non arithméticité de $\mathcal{L}(G)$ est équivalente au mélange topologique de $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur Ω ([**Bo**]; [**G-H**]).

Nous résumons ici les hypothèses sous lesquelles, à notre connaissance, il a été montré que $\mathcal{L}(G)$ n'est pas arithmétique. Signalons que la démonstration donnée par D. Rudolph [**R**] dans le cas de courbure -1 est incomplète.

Résultats connus. *Soient X une variété de Hadamard pincée de dimension n et G un groupe d'isométries non élémentaire agissant proprement discontinûment librement sur X, si l'une des conditions suivantes est vérifiée alors $\mathcal{L}(G)$ n'est pas arithmétique.*

1) *X est isométrique au demi-espace de Poincaré $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.* ([**R**]).
2) *$L(G)$ a une composante connexe non réduite à 1 point* [**Bo**].
3) *G contient des transformations paraboliques* ([**D-P**]).

Démonstration. D'après le corollaire 1.3, si $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N}$ alors quelque soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in L(G)$ on a:

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] \in e^{\frac{a}{2}\mathbb{Z}} .$$

1) Quitte à conjuguer G, on peut supposer que G contient une isométrie hyperbolique g fixant 0 et ∞. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L(G) - \{0, \infty\}$ notons P l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ d'équation $[\xi_1, \xi_2, \infty, x] = 1$. En choisissant convenablement ξ_1 et ξ_2 on peut supposer que $0 \notin P$. On a

$$\lim_{k\to+\infty} [\xi_1, \xi_2, \infty, g^k(\xi_3)] = 1$$

donc si $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N}$, le birapport étant à valeurs dans $e^{\frac{a}{2}\mathbb{Z}}$, il existe $N > 0$ tel que $[\xi_1, \xi_2, \infty, g^k(\xi_3)] = 1$ pour tout $k \leq N$, autrement dit $g^k(\xi_3) \in P$. Si $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ on obtient une contradiction car $\xi_3 \notin \{0, +\infty\}$.

Sinon puisque $0 \notin P$ il existe $N_1 > N$ tel que $g^{N_1}(P) \neq P$. Par ailleurs $g^{N_1+m}(\xi_3) \in P \cap g^{N_1}(P)$ pour tout $m > N$ donc $\mathcal{E}_1 = P \cap g^{N_1}(P)$ est un sous-espace affine non vide de dimension $\leq n-3$. Pour la même raison il existe $N_2 > N_1$ tel que $\mathcal{E}_1 \not\subset g^{N_2}(P)$. Pour tout $m > N$ on a $g^{N_2+m}(\xi_3) \in \mathcal{E}_1 \cap g^{N_2}(P)$ donc $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cap g^{N_2}(P)$ est un sous-espace affine non vide de dimension $\leq n-4$. On construit ainsi une suite $(\mathcal{E}_k)_{k\geq 1}$ de sous-espaces affine emboîtés tels que $0 \leq \dim \mathcal{E}_k < \dim \mathcal{E}_{k-1}$. Soit $q > 0$ tel que $\mathcal{E}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{E}_q$ soit réduit à un point ξ, on a $\lim_{s\to+\infty} g^s(\xi_3) = \xi$, ce qui est impossible car $\xi_3 \neq 0$.

2) Soit C une composante connexe de $L(G)$ non réduite à 1 point. Considérons l'application $f\colon C \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ définie par $f(\xi) = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi]$ où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des points distincts fixés dans C. Remarquons que $f(\xi_2) = 0$, le birapport étant continu, si $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N}$ alors $f(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in C$ ce qui est impossible.

3) Supposons que G contienne une transformation parabolique p. On note ξ l'unique point sur $X(\infty)$ fixé par p, on a $|p'(\xi)| = 1$. Fixons une transformation hyperbolique $g \in G$ ne fixant pas ξ. Quitte à prendre des puissances suffisamment grandes de p et h on peut supposer que le groupe engendré par p et h est un groupe de *Schottky généralisé* [**D-P**]. Dans ce cas, hp^n est une transformation hyperbolique, on note respectivement ξ_n^+, ξ_n^- ses point fixes attractifs et répulsifs. On a:

$$\begin{aligned} e^{\ell(hp^n)-\ell(hp^{n-1})} &= \left|(hp^n)'(\xi_n^-)\right|\left|(hp^{n-1})'(\xi_{n-1}^+)\right| \\ &= \left|p'(\xi_n^-)\right|\left|(hp^{n-1})'(p(\xi_n^-))\right|\left|(hp^{n-1})'(\xi_{n-1}^+)\right| \\ &= \left|p'(\xi_n^-)\right|\frac{D^2(\xi_n^-,\xi_{n-1}^+)}{D^2(p(\xi_n^-),\xi_{n-1}^+)} . \end{aligned} \tag{E}$$

Comme ξ_n^- converge vers le point ξ et

$$\lim_{n\to+\infty} \xi_n^+ = h(\xi) ,$$

le quotient

$$\frac{D^2(\xi_n^-,\xi_{n-1}^+)}{D^2(p(\xi_n^-),\xi_{n-1}^+)}$$

converge vers 1 et donc

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ell(hp^n)-\ell(hp^{n-1})} = |p'(\xi)| = 1 \ .$$

Si $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N}$, on obtient pour n grand $\ell(hp^n) = \ell(hp^{n+1})$, ce qui est impossible. En effet, le groupe $\Gamma = \langle h, p\rangle$ étant *géométriquement fini* (voir définition §III), le nombre de géodésiques fermées sur $X_{/\Gamma}$ de longueur inférieure à t est fini pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ ([**D-P**]). $\square$

A notre connaissance, la question de l'arithméticité du spectre des longueurs est encore ouverte dans le cas général. Nous y répondons dans le cas des surfaces.

2.1. Proposition. *Si G est un groupe fuchsien agissant sur une surface de Hadamard alors $\mathcal{L}(G)$ n'est pas arithmétique.*

Démonstration. Considérons deux transformations hyperboliques $g_1, g_2 \in G$ dont les points fixes sont répartis comme suit (figure 2).

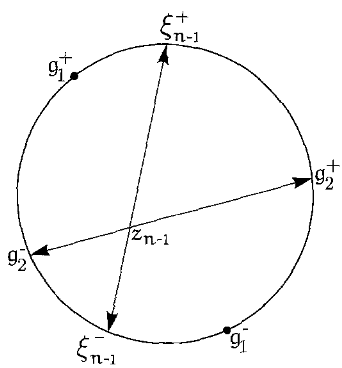

Figure 2

Pour n grand, $g_1g_2^n$ est une transformation hyperbolique, on note respectivement ξ_n^+, ξ_n^- ses points fixes attractifs et répulsifs. En reprenant les égalités (E) qui interviennent dans la démonstration précédente (partie 3), on obtient:

$$e^{\ell(g_1g_2^n)-\ell(g_1g_2^{n-1})} = |g_2'(\xi_n^-)|\frac{D^2(\xi_n^-, \xi_{n-1}^+)}{D^2(g_2(\xi_n^-), \xi_{n-1}^+)} \ .$$

Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ell(g_1g_2^n)-\ell(g_1g_2^{n-1})} = e^{\ell(g_2)} .$$
Si $\mathcal{L}(G) \subset a\mathbb{N}$ on en conclut que pour n grand $\ell(g_1g_2^n) = \ell(g_1g_2^{n-1})+\ell(g_2)$. La position croisée des points fixes de g_1, g_2 entraîne que les axes de g_2 et $g_1g_2^{n-1}$ se coupent (voir figure 2). Notons z_{n-1} leur point d'intersection, on a
$$\begin{aligned}\ell(g_1g_2^n) &\leq d(g_1g_2^n(z_{n-1}), z_{n-1})\\ &< \ell(g_1g_2^{n-1}) + \ell(g_2)\end{aligned}$$
la dernière inégalité est stricte car les axes de g_2 et $g_1g_2^{n-1}$ sont différents. Ceci contredit l'égalité $\ell(g_1g_2^n) = \ell(g_1g_2^{n-1}) + \ell(g_2)$. □

Si G est convexe-compact, la restriction à l'ensemble récurrent Ω du flot géodésique est conjuguée à une suspension au dessus d'un sous-décalage de type fini sur un espace symbolique ([**Bo**], [**P**]). Cette représentation permet, à partir de résultats obtenus par le biais du formalisme thermodynamique au niveau symbolique, de décrire le caractère stochastique du flot géodésique. Notons $N_G(t)$ le nombre de géodésiques fermées sur $S_{/G}$ de longueur $\leq t$ et δ_G l'exposant critique de la série $\sum_{g\in G} e^{-sd(0,g(0))}$, on montre par ce procédé le

Théorème [P-P]. *Si le flot géodésique est topologiquement mélangeant alors $N_G(t)$ est équivalent à $e^{\delta_G t}/\delta_G t$ quand t tend vers $+\infty$.*

On déduit de ce théorème, de la proposition 2.1 et de l'équivalence, dans le cas convexe-cocompact, entre le mélange topologique du flot géodésique et la non arithméticité du spectre des longueurs le

2.2. Corollaire. *Si G est un groupe fuchsien convexe-cocompact agissant sur une surface de Hadamard pincée alors $N_G(t)$ est équivalent à $e^{\delta_G t}/\delta_G t$ quand t tend vers $+\infty$.*

III. Indépendance entre les spectres et comptage simultané

Soient G_1, G_2 deux groupes fuchsiens agissant respectivement sur deux surfaces de Hadamard pincées S_1, S_2. On dit que G_1, G_2 sont *ρ-fortement isomorphes* s'il existe un isomorphisme ρ entre G_1 et G_2 conservant le type de chaque isométrie. Les spectres $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont *dépendants* s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls tels que $a\ell(g) + b\ell(\rho(g)) \in \mathbb{Z}$ pour toute transformation hyperbolique $g \in G$.

Plaçons-nous en courbure -1, notons $\mathbb{D}$ le disque de Poincaré et 0 son centre. Dans ce cas $\mathbb{D}(\infty) = S^1$ et la distance D sur S^1 introduite dans le §1 est définie par $D(\xi_1, \xi_2) = \sin\frac{\theta}{2}$ où $\theta \in [0, \pi]$ désigne la mesure de l'angle $\widehat{\xi_1 \circ \xi_2}$. Un groupe fuchsien G agissant sur $\mathbb{D}$ est *géométriquement fini* s'il est de type fini. Soient G_1, G_2 deux groupes fuchsiens géométriquement finis ρ-fortement isomorphes, agissant sur $\mathbb{D}$. Il existe un unique homéomorphisme, appelé *homéomorphisme de Nielsen*, φ entre $L(G_1)$ et $L(G_2)$ vérifiant $\varphi \circ g = \rho(g) \circ \varphi$ pour tout $g \in G$ [**T**]. Si les G_i sont cocompacts, on sait d'après [**S-S**] que $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont indépendants, nous généralisons ce résultat.

3.1. Proposition. *Si G_1 et G_2 sont deux groupes géométriquement finis ρ-fortement isomorphes agissant sur $\mathbb{D}$, alors $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont dépendants si et seulement si ρ est un automorphisme intérieur.*

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant.

3.2. Lemme. *Soient g une transformation hyperbolique de $\mathbb{D}$ et $\xi \in S^1 - \{g^+, g^-\}$, pour tout $\eta \in S^1 - \{g^+\}$ il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que*

$$\frac{D(g^k(\xi), \eta)}{D(g^+, \eta)} = 1 + \frac{\epsilon}{2} e^{-k\ell(g)} \left| \cos \frac{\widehat{\eta \circ g^+}}{2} \right| \frac{D(g^+, g^-)D(\xi, g^+)}{D(\eta, g^+)D(\xi, g^-)} + o(e^{-k\ell(g)}) .$$

Admettons ce lemme dans un premier temps et démontrons la proposition.

Démonstration de 3.1. Notons φ l'homéomorphisme de Nielsen entre $L(G_1)$ et $L(G_2)$. Supposons que $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ soient dépendants, aucun des spectres n'étant arithmétique (proposition 2.1) il existe deux réels $r \in \mathbb{R}^*$ et s tels que pour toute transformation hyperbolique $g \in G_1$ on ait $\ell(g) = r\ell(\rho(g)) + sz(g)$ avec $z(g) \in \mathbb{Z}$. Soient g_1 et g_2 deux transformations hyperboliques de G_1 n'ayant pas de point fixe en commun, d'après le lemme 1.2, on a

$$[g_1^-, g_2^-, g_1^+, g_2^+] = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{2}(\ell(g_1^n) + \ell(g_2^n) - \ell(g_1^n g_2^n))} .$$

Ainsi $[g_1^-, g_2^-, g_1^+, g_2^+] \in [\varphi(g_1^-), \varphi(g_2^-), \varphi(g_1^+), \varphi(g_2^+)]^r e^{\frac{s}{2}\mathbb{Z}}$. L'ensemble des paires de points (g^-, g^+), où g parcourt les transformations hyperboliques de G_1, étant dense dans $L(G_1) \times L(G_1)$ (voir par exemple [**K**]), pour tous points $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ de $L(G_1)$, on a:

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] \in [\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2), \varphi(\xi_3), \varphi(\xi_4)]^r e^{\frac{s}{2}\mathbb{Z}} . \tag{E1}$$

Soit g une transformation hyperbolique de G_1. Fixons $\xi \in L(G_1) - \{g^+, g^-\}$. Pour tous $\eta, \eta' \in L(G_1) - \overline{\langle g \rangle \xi}$ on a

$$\lim_{k \to +\infty} [g^+, g^k(\xi), \eta, \eta'] = 1 .$$

On déduit de l'égalité (E_1) que pour k grand

$$[g^+, g^k(\xi), \eta, \eta'] = [\varphi(g^+), \varphi(g^k(\xi)), \varphi(\eta), \varphi(\eta')]^r . \tag{E2}$$

Rappelons que

$$[g^+, g^k(\xi), \eta, \eta'] = \frac{D(g^k(\xi), \eta')}{D(g^+, \eta')} \frac{D(g^+, \eta)}{D(g^k(\xi), \eta)} .$$

En utilisant le lemme 3.2, on obtient A, A' et B, B' tels que

$$\begin{aligned} [g^+, g^k(\xi), \eta, \eta'] &= 1 + e^{-k\ell(g)}(A - A') + e^{k\ell(g)}\epsilon(k) \\ [\varphi(g^+), \varphi(g^k(\xi)), \varphi(\eta), \varphi(\eta')]^r &= 1 + re^{-k\ell(\rho(g))}(B - B') + \\ &\quad + e^{-k\ell(g)}\epsilon(k) . \end{aligned} \tag{E3}$$

Supposons $\ell(g) < \ell(\rho(g))$. Les expressions de A et A' données dans le lemme 3.2 montrent que l'on peut choisir $\eta' \neq \eta$, tel que $A \neq A'$. Or d'après les égalités (E_2), (E_3),

$$A - A' = \lim_{k \to +\infty} re^{-k(\ell(\rho(g)) - \ell(g))}(B - B')$$

ce qui est contradictoire. Si maintenant $\ell(g) > \ell(\rho(g))$ on reprend le raisonnement en choisissant cette fois η' de sorte que $B \neq B'$. En conclusion $\ell(g) = \ell(\rho(g))$ pour toute transformation hyperbolique $g \in G_1$ et donc, d'après [**K**], ρ est un automorphisme intérieur. $\square$

Démonstration du lemme 3.2. On a

$$\frac{D(g^k(\xi), \eta)}{D(g^+, \eta)} - 1 = \frac{D(g^k(\xi, \eta)) - D(g^+, \eta)}{D(g^k(\xi), g^+)} \times \frac{D(g^k(\xi), g^+)}{D(\eta, g^+)} .$$

En utilisant la propriété de conformité de D, on obtient

$$D(g^k(\xi), g^+) = \left|g^{k'}(\xi)\right|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{2}\ell(g)} D(\xi, g^+)$$

que l'on peut encore écrire

$$D(g^k(\xi), g^+) = e^{-k\ell(g)} \frac{D(g^k(\xi), g^-) D(\xi, g^+)}{D(\xi, g^-)} .$$

Ainsi

$$e^{k\ell(g)} \left(\frac{D(g^k(\xi), \eta)}{D(g^+, \eta)} - 1 \right) = \frac{D(g^k(\xi), \eta) - D(g^+, \eta)}{D(g^k(\xi), g^+)} \frac{D(g^k(\xi), g^-) D(\xi, g^+)}{D(\xi, g^-) D(\eta, g^+)} .$$

Soit $x \in S^1 - \{\eta\}$ notons

$$f(x) = \left|\sin \frac{\widehat{\eta \circ x}}{2}\right| ,$$

cette fonction admet des dérivées à droite et à gauche de x notées respectivement $f'_-(x)$ et $f'_+(x)$. Ces dérivées vérifient

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \left|\frac{1}{2} \cos \frac{\widehat{\eta \circ x}}{2}\right| .$$

Ainsi

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{D(g^k(\xi), \eta) - D(g^+, \eta)}{D(g^k(\xi), g^+)} = \frac{\epsilon}{2} \left|\cos \frac{\widehat{\eta \circ g^+}}{2}\right|$$

avec $\epsilon = \pm 1$. Pour achever le lemme il suffit de remarquer que

$$\lim_{k \to +\infty} D(g^k(\xi), g^-) = D(g^+, g^-) . \qquad \square$$

Supposons à présent que S_1 et S_2 soient deux surfaces de Hadamard pincées quelconques et que les groupes fuchsiens isomorphes G_1, G_2 soient cocompacts. L'hypothèse de compacité garantit l'existence d'un homéomorphisme de Nielsen φ entre $L(G_1) = S_1(\infty)$ et $L(G_2) = S_2(\infty)$ induit par l'isomorphisme ρ entre G_1 et G_2. Si les spectres des longueurs sont dépendants, comme ils ne sont pas arithmétiques, il existe $r \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\ell(g) = r\ell(\rho(g) + sz(g)$ pour tout $g \in G_1$, avec $z(g) \in \mathbb{Z}$. Fixons $g \in G_1$ et $\xi \in S_1(\infty) - \{g^\pm\}$, comme g préserve l'orientation il existe un arc ouvert $I \subset S_1(\infty)$ contenant g^+, g^- mais ne contenant ni ξ, ni $g(\xi)$ (voir figure 3).

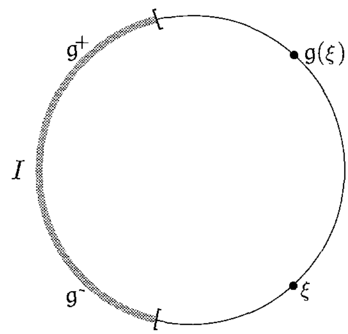

Figure 3

L'application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$f(y) = [y, g^+, g(\xi), \xi]/[\varphi(y), \varphi(g^+), \varphi(g(\xi)), \varphi(\xi)]^r$$

est continue. L'égalité (E_1) (voir démonstration de 3.1) est encore valable en courbure variable et donc $f(y) \in e^{\frac{s}{2}\mathbb{Z}}$. Comme I est connexe, la fonction f est constante sur I et égale à $f(g^+) = 1$. L'égalité $f(g^-) = 1$ entraîne (lemme 1.1) que $\ell(g) = r\ell(\rho(g))$ pour tout $g \in G_1$. Multiplions la distance sur S_2 par r et notons S_2' la nouvelle surface Riemannienne obtenue. Les surfaces compactes S_1/G_1 et S_2'/G_2 ont même spectre marqué des longueurs donc d'après un résultat de J. P. Otal [**O2**] elles sont isométriques. La borne supérieure de la courbure sur S_1 et S_2 ayant été normalisée par -1, nécessairement $r = 1$ et $S_2 = S_2'$. On vient ainsi de montrer la

3.3. Proposition. *Si G_1, G_2 sont deux groupes fuchsiens cocompacts isomorphes agissant sur deux surfaces de Hadamard pincées S_1, S_2 alors $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont dépendants si et seulement si S_1/G_1 et S_2'/G_2 sont isométriques.*

Pour $i = 1, 2$, on note M_i la surface compacte S_1/G_i et T^1M_i son fibré unitaire tangent. On suppose que M_1 et M_2 ne sont pas isométriques. Fixons $0 \in M_2$ et considérons le *cocycle höldérien* (voir [**L**] pour des définitions précises) $c\colon G_1 \times S_1(\infty) \to \mathbb{R}$ défini par $c(g, x) = -B_{\varphi(\xi)}(0, \rho(g^{-1})(0))$. Les *périodes* de c sont les réels $c(g, g^+)$ où g parcourt G_1. Cocycles höldériens et fonctions höldériennes sur T^1M_1 sont très liées. En particulier pour chaque cocycle höldérien il existe une fonction höldérienne dont l'intégrale le long de l'orbite périodique pour le flot géodésique $\bar{g}$ associée à chaque $g \in G$ est exactement la valeur du cocycle en (g, g^+) ([**L**]). Soit f une fonction höldérienne associée à c, on a $\int_{\bar{g}} f(t)dt = \ell(\rho(g))$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$P(tf) = \sup_{\nu}\{h(\nu) + \int_{T^1M_1} tf d\nu\}$$

où ν parcourt l'ensemble des mesures de probabilités sur T^1M_1 invariantes par le flot géodésique et $h(\nu)$ désigne l'entropie du flot relativement à ν. Cette borne supérieure est atteinte par une unique mesure, notée μ_{tf}. D'après la proposition 3.3, les surfaces M_1 et M_2 n'étant pas isométriques, les spectres $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$ sont indépendants. Ceci a pour conséquence que l'application $t \longmapsto P(tf)$ est analytique et strictement convexe (voir ([**S-S**]). En particulier $P'(tf) = \int_{T^1M_1} fd\mu_{tf}$. On note J l'intervalle des valeurs $P'(tf)$. Soient $\epsilon > 0, a \in J$, on note $N^{\epsilon,a}_{G_1G_2}(t)$ le nombre de classes de conjugaison de $g \in G_1$ tels que

$$\ell(g) \in [at, at+\epsilon] \quad \text{et} \quad \ell(\rho(g)) \in [at, at+\epsilon].$$

La proposition suivante se trouve dans [**S-S**]:

Proposition [S-S]. *Soit t_a l'unique réel vérifiant $\int_{T^1M_1} fd\mu_{t_af} = a$, il existe $C > 0$ tel que $N^{\epsilon,a}_{G_1,G_2}(t)$ soit équivalent à*

$$\frac{Ce^{h(\mu_{t_af})t}}{t^{3/2}}$$

quand t tend vers $+\infty$.

En particulier si $1 \in J$, la quantité $N^{\epsilon,1}_{G_1,G_2}(t)$ mesure la ressemblance entre $\mathcal{L}(G_1)$ et $\mathcal{L}(G_2)$. En utilisant un argument de [**S-S**], on montre que l'hypothèse $1 \in J$ est vérifiée s'il existe $g_1, g_2 \in G_1$ tels que

$$\ell(g_1) > \ell(\rho(g_1)) \quad \text{et} \quad \ell(g_1) < \ell(\rho(g_1))\ .$$

Ceci est le cas par exemple lorsque $S_1 = S_2 = \mathbb{D}$.

IV. Comparaison entre longueur géométrique et combinatoire et rapport des spectres

Dans ce paragraphe nous sortons du contexte des surfaces. Considérons une variété de Hadamard pincée X de dimension quelconque. On rappelle ([**D**]-[**D-P**]) qu'un groupe G engendré par deux isométries hyperboliques g_1 et g_2 est un groupe de *Schottky* s'il existe 4 voisinages fermés $V(g_1^+), V(g_1^-), V(g_2^+), V(g_2^-)$ dans $\bar{X} = X \cup X(\infty)$ deux à deux disjoints tels que pour $i = 1,2$ on ait $g_i(\overline{\overline{X} - V(g_i^-)}) = V(g_i^+)$ (voir figure 4).

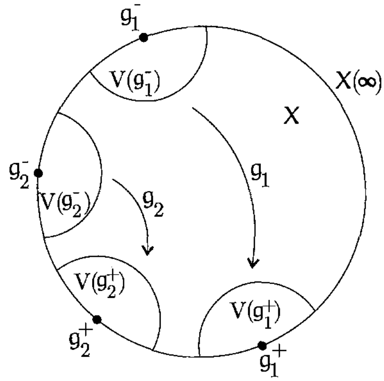

Figure 4

Un tel groupe est libre et agit proprement discontinûment et librement sur X. L'intérieur du domaine $\mathcal{D} = \overline{X} - (V(g_1^+) \cup V(g_1^-) \cup V(g_2^+) \cup V(g_2^-))$ est un domaine fondamental pour l'action de G. Le groupe G est constitué uniquement de transformations hyperboliques et a une *dynamique du Ping-Pong* au sens où, si $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n$ est un mot réduit (i.e. $\omega_{i+1} \neq \omega_i^{-1}$) en $\{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}\}$ alors $\omega(\mathcal{D}) \subset V(\omega_1)$. La variété X/G n'est pas compacte mais G est convexe-cocompact ce qui entraîne que toutes les géodésiques fermées de X/G restent dans un compact $K \subset X/G$. Fixons un point 0 à l'intérieur de $\mathcal{D}$, on dit que le groupe G satisfait la condition (*) s'il existe $C > 0$ tel que pour tous mots réduits $\omega_1 = \omega_{11}\omega_{12} \ldots \omega_{1\ell}$ et $\omega_2 = \omega_{21}\omega_{22} \ldots \omega_{2r}$ avec $\omega_{11} \neq \omega_{21}$ on ait:

$$\omega_1(0)\widehat{\,0\,}\omega_2(0) > C. \tag{*}$$

Par exemple, si N est suffisamment grand, le groupe engendré par g^N et h^N est un groupe de Schottky satisfaisant la condition (*). En utilisant la propriété de comparaison des triangles dans les CAT(-1) ([**Bo**]) et la loi des cosinus dans le demi-plan de Poincaré, on déduit de (*) l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que pour tous mots réduits ω_1, ω_2 choisis comme ci-dessus on ait:

$$\begin{aligned} d(\omega_1(0),0) + d(\omega_2(0),0) - C' &\leq d(\omega_1(0),\omega_2(0)) \\ &\leq d(\omega_1(0),0) + d(\omega_2(0),0) \ . \end{aligned} \tag{**}$$

Un mot $\omega = \omega_1^{n_1} \cdots \omega_p^{n_p}$ est fortement réduit si $\omega_i \in \{g_1, g_2\}, n_i \in \mathbb{Z}^*$, $\omega_i \neq \omega_{i+1}$ et $\omega_1 \neq \omega_p$ si $n_1 n_p < 0$.

4.1. Lemme de comparaison entre longueur géométrique et combinatoire. *Soit G un groupe de Schottky à deux générateurs satisfaisant la condition (*) et agissant sur une variété de Hadamard pincée X. Il existe $d > 0$ tel que pour tout $p > 0$ et pour tout mot fortement réduit $\omega = \omega_1^{n_1} \ldots \omega_p^{n_p}$ on ait*

$$\left| \ell(\omega) - \sum_{i=1}^{p} |n_i| \ell(\omega_i) \right| \leq dp.$$

Démonstration. Soit $\omega = \omega_1^{n_1} \ldots \omega_p^{n_p}$ un mot fortement réduit, ω est une transformation hyperbolique dont les points fixes ω^+ et ω^- appartiennent respectivement à $V(\omega_1^{\mathrm{signe}(n_1)})$ et $V(\omega_p^{\mathrm{signe}(-n_p)})$. Le mot ω étant fortement réduit, ces deux voisinages sont différents. La géodésique d'extrémités ω^+ et ω^- rencontre donc le relevé $\tilde{K}$ dans $\mathcal{D}$ du compact $K \subset X/G$ contenant toutes les géodésiques fermées. Pour $i = 1, \ldots, p$ posons $\omega^i = \omega_i^{n_i} \ldots \omega_p^{n_p}$. On déduit de l'inégalité (**) l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} d(0,\omega_i^{n_i}(0)) + d(0,\omega^{i+1}(0)) - C' &\leq d(0,\omega^i(0)) \\ &\leq d(0,\omega_i^{n_i}(0)) + d(0,\omega^{i+1}(0)) \ . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{p} d(0,\omega_i^{n_i}(0)) - Cp \leq d(0,\omega(0)) \leq \sum_{i=1}^{p} d(0,\omega_i^{n_i}(0)) \ . \tag{I1}$$

En utilisant le fait que $(\omega^+\omega^-) \cap \tilde{K} \neq \phi$, on obtient

$$\ell(\omega) \leq d(0,\omega(0)) \leq 2 \text{ diamètre } (\tilde{K}) + \ell(\omega) \ . \tag{I2}$$

La même inégalité est valable si on remplace ω par $\omega_i^{n_i}$.

On déduit de (I1) et (I2) l'existence de $d > 0$ vérifiant
$$\left|\ell(\omega) - \sum_{i=1}^{p} |n_i|\ell(\omega_i)\right| \leq dp \ . \qquad \square$$

Considérons à présent deux variétés de Hadamard pincées X_1, X_2 sur lesquelles agissent proprement discontinûment et librement deux groupes d'isométries non élémentaires G_1 et G_2. On suppose que G_1 et G_2 sont ρ-fortement isomorphes et on note $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$ l'ensemble des $\ell(\rho(g))/\ell(g)$ où g parcourt l'ensemble des transformations hyperboliques de G_1.

4.2. Proposition. *L'adhérence de $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$.*

Cette proposition est due à M. Burger [**Bu**] et Y. Benoist [**B**] dans le cas particulier des espaces symétriques de rang 1.

Démonstration. Soient g_1, h_1 deux transformations hyperboliques de G_1, notons $g_2 = \rho(g_1)$ et $h_2 = \rho(h_1)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}, g_1 \neq h_1^n$. Pour montrer la proposition il suffit de montrer que l'intervalle
$$\left[\frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)}, \frac{\ell(h_2)}{\ell(h_1)}\right]$$
est inclus dans $\overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}$. Quitte à remplacer g_1, h_1 par g_1^N, h_1^N on peut supposer que les groupes engendrés respectivement par g_1, h_1 et g_2, h_2 sont deux groupes de Schottky satisfaisant la condition (*). D'après le lemme 4.1, il existe $E > 0$ tel que pour $i = 1, 2$ et pour tous $n, m > 0$ on ait:
$$|\ell(g_i^n h_i^m) - n\ell(g_i) - m\ell(h_i)| \leq E$$
ainsi
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\ell(g_2^{nk} h_2^{mk})}{\ell(g_1^{nk} h_1^{mk})} = \frac{\ell(g_2) + \frac{n}{m}\ell(h_2)}{\ell(g_1) + \frac{n}{m}\ell(h_1)} \ .$$
Donc pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{\ell(g_2) + x\ell(h_2)}{\ell(g_1) + x\ell(h_1)} \in \overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}. \qquad \square$$

Remarque*. Dans le cas où G_1 et G_2 sont cocompacts la proposition 4.2 se démontre directement. En effet considérons, comme dans la dernière partie du §III, le cocycle höldérien $c: G_1 \times X_1(\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $c(g,\xi) = -B_{\varphi(\xi)}(0, \rho(g^{-1})(0))$ où φ est l'homéomorphisme de Nielsen induit par ρ entre $X_1(\infty)$ et $X_2(\infty)$. Il existe une fonction höldérienne f du fibré unitaire tangent noté T_1 de X_1/G_1 dans $\mathbb{R}$ dont les périodes sont les mêmes que celles de c. Autrement dit, si $g \in G_1$, l'intégrale de f le long de l'orbite périodique pour le flot géodésique associée à g est $\ell(\rho(g))$. Notons I l'ensemble des $\int_{T^1} f d\nu$ où ν parcourt les mesures de probabilités sur T^1 invariantes par le flot géodésique. Cet ensemble est un intervalle qui contient $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$. Par ailleurs les mesures orbitales de probabilité étant denses dans l'ensemble des mesures de probabilités sur T^1 invariantes par le flot géodésique, on a $I = \overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}$.

Revenons au cas où $G_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$ et $G_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$ sont deux groupes de Schottky satisfaisant la condition (*). Notons ρ l'isomorphisme entre G_1 et G_2 défini par $\rho(a_1) = a_2$ et $\rho(b_1) = b_2$. Nous proposons d'interpréter géométriquement l'intervalle $\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)$. Considérons la variété Riemannienne $X = X_1 \times X_2$ et fixons $0 = (0_1, 0_2) \in X$. Le bord géométrique $X(\infty)$ de X s'identifie au fibré unitaire tangent $T_0^1 X$ en 0. Soit $u = (u_1, u_2) \in T_0^1 X$, on dit que u est *régulier* si $u_i \neq 0$ pour $i = 1, 2$ et on note $X_{\text{reg}}(\infty)$ l'ensemble des points réguliers de $X(\infty)$. On code cet ensemble par $X_1(\infty) \times X_2(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$ via l'application qui à u associe

$$\left(\frac{u_1}{\|u_1\|_1}, \frac{u_2}{\|u_2\|_2}, \frac{\|u_2\|_2}{\|u_1\|_1} \right) .$$

Soit $(g_n = (g_{n1}, g_{n2}))_{n \geq 1}$ une suite d'isométries de X telle que $(g_n(0))_{n \geq 1}$ converge vers $\xi \in X_{\text{reg}}(\infty)$; le point ξ est codé par (ξ, ξ_2, p) avec

$$\xi_i = \lim_{n \to +\infty} g_{n_i}(0_i) \quad \text{et} \quad p = \lim_{n \to +\infty} \frac{d_2(g_{n2}(0_2), 0_2)}{d_1(g_{n1}(0_1), 0_1)} .$$

Par exemple, si g_1 et g_2 sont hyperboliques et si $g_{n_i} = g_i^n$ pour $i = 1, 2$, la suite $(g^n(0))_{n \geq 1}$ converge vers

$$\left(g_1^+, g_2^+, \frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)} \right) .$$

*Communication orale de F. Ledrappier.

Notons G le groupe formé des couples $(g_1, \rho(g_1))$ où g_1 parcourt G_1. Ce groupe agit proprement discontinument et librement sur X, on note $L(G) = X(\infty) \cap \overline{G0}$. Dans [**D**] on montre que $L(G) \subset X_{\mathrm{reg}}(\infty)$. Soit $P(G)$ la projection sur $\mathbb{R}_*^+$ de $L(G)$.

4.3. Proposition. $P(G) = \overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}$.

Démonstration. Notons ici $I = \overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}$. Soit $g_1 \in G_1$ posons $\rho(g_1) = g_2$. Pour $i = 1, 2$ choisissons un point z_i appartenant à la géodésique $(g_i^- g_i^+)$, on a

$$d_i(0_i, g_i^n(0_i)) - C_i \leq d_i(z_i, g_i^n(z_i)) \leq d_i(0_i, g_i^n(0_i)) + C_i$$

où $C_i = 2d_i(0_i, z_i)$ ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(g_2^n(0_2), 0_2)}{d_1(g_1^n(0_1), 0_1)} = \frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)}$$

et donc $I \subset P(G)$.

Soit $p \in P(G)$ tel que

$$p = \lim_{n\to+\infty} \frac{d_2(\rho(g_{n_1})(0_2), 0_2)}{d_1(g_{n_1}(0_1), 0_1)}$$

posons $\rho(g_{n_1}) = g_{n_2}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $g_{n_1} = \omega_1 \dots \omega_{\ell_n}$ avec

$$\omega_i \in \{a_1^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}\} \omega_i \neq \omega_{i+1}^{-1}, \lim_{n\to+\infty} \ell_n = +\infty \quad \text{et} \quad \omega_{\ell_n} = \omega.$$

Si $\omega_1 \neq \omega^{-1}$, il existe un compact $\tilde{K} \subset \mathcal{D}$ (introduit début §IV) coupé par les géodésiques $(g_{n_1}^-, g_{n_1}^+)$. Choisissons $z_n \in \tilde{K} \cap (g_{n_1}^- g_{n_1}^+)$ et notons $S_1 = \sup_{k\in\tilde{K}} d_1(0_1, k)$ on a

$$\ell(g_{n_1}) - 2S_1 \leq d_1(g_{n_1}(0_1), 0_1) \leq 2S_1 + \ell(g_{n_1}) \; .$$

La même inégalité a encore lieu si on remplace g_{n_1} par g_{n_2} et S_1 par S_2. Ceci montre que

$$p = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ell(g_{n_2})}{\ell(g_{n_1})}$$

et donc $p \in I$. Si maintenant $\omega_1 = \omega^{-1}$, regroupons les lettres de g_{n_1} par puissances, on obtient

$$g_{n_1} = \omega_1^{m_1} \dots \omega_{s_{n-1}}^{m s_{n-1}} \omega_1^{m s_n}$$

avec

$$\omega_i \in \{a_1, b_1\}, n_i \in \mathbb{Z}^*, \omega_{i+1} \neq \omega_i \text{ et } m_1 m_{s_n} < 0 \ .$$

Notons $g'_{n_1} = \omega_1^{m_1} \dots \omega_{s_{n-1}}^{m_{s_{n-1}}}$. Puisque $\omega_{s_{n-1}} \neq \omega_1^{\pm 1}$ et que G_1 satisfait la condition (*), il existe $e_1 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} d_1(0_1, g'_{n_1}(0_1)) + d_1(0_1, \omega_1^{m_{s_n}}(0_1)) - e_1 \leq d_1(0_1, g_{n_1}(0_1)) = \\ = d_1(g'^{-1}_{n_1}(0_1), \omega_1^{m_{s_n}}(0_1)) \end{aligned}$$

et

$$d_1(g'^{-1}_{n_1}(0_1), \omega_1^{m_{s_n}}(0_1)) \leq d_1(0_1, g'_{n_1}(0_1)) + d_1(0_1, \omega_1^{m_{s_n}}(0_1)) \ .$$

Les géodésiques $(g'^{-}_{n_1} g'^{+}_{n_1})$ et $(\omega_1^- \omega_1^+)$ coupent le compact $\tilde{K}$ donc

$$\ell(g'_{n_1}) + \ell(\omega_1^{m_{s_n}}) - e_1 - 4S_1 \leq d_1(0_1, g_{n_1}(0_1)) \leq 4S_1 + \ell(g'_{n_1}) + \ell(\omega_1^{m_{s_n}}) \ .$$

La même inégalité a encore lieu si on remplace g_{n_1} par g_{n_2} et S_1 par S_2. Ceci montre que

$$p = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ell(g'_{n_2}) + \ell(\omega_2^{m_{s_n}})}{\ell(g'_{n_1}) + \ell(\omega_1^{m_{s_n}})} \ .$$

Or

$$\left[\frac{\ell(g'_{n_2})}{\ell(g'_{n_1})}, \frac{\ell(\omega_2^{m_{s_n}})}{\ell(\omega_1^{m_{s_n}})}\right] \subset I$$

donc $p \in I$. L'intervalle I étant fermé, on en conclut que $P(G) \subset I$. □

Considérons toujours le cas où $G_1 = \langle g_1, h_1 \rangle$ et $G_2 = \langle g_2, h_2 \rangle$ sont des groupes de Schottky. Ces groupes étant convexes cocompacts, G_i pour $i = 1, 2$ muni de la métrique des mots et l'orbite $G_i(O_i)$ où O_i est fixé dans X_i sont quasi-isométriques [**Bo**]. Ainsi, il existe $\lambda > 1$ et $C > 0$ tels que pour tout mot fortement réduit $\omega = \omega_1^{n_1} \dots {}_p^{n_p} \in G_i$ on ait:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{p} |n_j| - C \leq \ell(\omega) \leq \lambda \sum_{j=1}^{p} |n_j| + C \ .$$

De cette double inégalité on peut montrer que l'intervalle $\overline{\mathcal{L}(G_2)/\mathcal{L}(G_1)}$ est dans ce cas de la forme [A,B] avec $A > 0$. On peut se demander s'il existe $s_1, t_1 \in G_1$ tels que

$$A = \frac{\ell(\rho(s_1))}{\ell(s_1)} \text{ et } B = \frac{\ell(\rho(t_1))}{\ell(t_1)} \ .$$

Nous allons voir que dans certains cas la réponse est positive. Si $X_1 = X_2 = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ la proposition suivante se trouve dans [**Be**] (§7.3).

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons G_{ik} le groupe engendré par g_i^k et h_i^k.

4.4. Proposition. *Si $\ell(g_2)\ell(h_1) - \ell(g_1)\ell(h_2) \neq 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $k > K$ l'intervalle*

$$\overline{\mathcal{L}(G_{2k}/\mathcal{L}(G_{1k})} = \left[\frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)}, \frac{\ell(h_2)}{\ell(h_1)}\right] .$$

Démonstration. Soit $\omega_k = g_1^{kn_1} h_1^{km_1} \dots g_1^{kn_p} h_1^{km_p}$ un mot fortement réduit de G_1. Notons

$$n(\omega_k) = \sum_{i=1}^{p} |n_i|, m(\omega_k) = \sum_{i=1}^{p} |m_i| \text{ et } v_1(\omega_k), v_2(\omega_k)$$

les coordonnées du vecteur $(\ell(\rho(\omega_k)), \ell(\omega_k))$ dans la base $(\ell(g_2), \ell(g_1))$, $(\ell(h_2), \ell(h_1))$. D'après le lemme 4.1, il existe $C > 0$ tel que $v_1(\omega_k) = kn(\omega_k) + pu_1(\omega_k)$ et $v_2(\omega_k) = km(\omega_k) + pu_2(\omega_k)$ avec $|u_i(\omega_k)| < C$. Prenons $K > C$, pour tout $k \geq K$, on a $v_1(\omega_k) > 0$ et $v_2(\omega_k) > 0$ ce qui montre que le vecteur $(\ell(\rho(\omega_k)), \ell(\omega_k))$ est à l'intérieur du cône positif associé à $(\ell(g_2), \ell(g_1))$ et $(\ell(h_2), \ell(h_1))$. Ainsi

$$\frac{\ell(\rho(\omega_k))}{\ell(\omega_k)} \in \left[\frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)}, \frac{\ell(h_2)}{\ell(h_1)}\right] .$$

Par ailleurs

$$\frac{\ell(g_2)}{\ell(g_1)} \quad \text{et} \quad \frac{\ell(h_2)}{\ell(h_1)}$$

appartiennent à $\overline{\mathcal{L}(G_{2k}/\mathcal{L}(G_{1k})}$ ce qui achève la démonstration. □

Remerciements. Je remercie Igor Rivin pour nos nombreuses discussions sur le spectre des longueurs et les membres du département de mathématiques de Warwick pour leur accueil chaleureux un mois de novembre pluvieux. Je remercie également Marc Peigné pour avoir lu attentivement les différentes versions de ce texte.

References

[**BE**] Y. Benoist: *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geometric and functional Analysis, **7:** (1997), 1-47.

[Bo] M. Bourdon: *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace*, L'enseignement mathématique, **41:** (1995), 63-102.

[Bu] M. Burger: *Intersection, Manhattan curve and Patterson-Sullivan theory in rank 2*, Intern. Math. Math. res. notices, (1993), no. 7, 217-225.

[D] F. Dal'bo: *Famille de groupes agissant sur le produit de deux variétés de Hadamard*, Sém. de Grenoble, 1997.

[D-P] F. Dal'bo & M. Peigné: *Some negatively curved manifold with cusps, mixing and counting*, J. Reigne Angew. Math. **497:** (1998), 141-169.

[G-H] Y. Guivarc'h & J. Hardy: *Théorèmes limites pour une classe de chaınes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. I.H.P. no. 1, (1998), 73-98.

[K] I. Kim: *Rigidity of rank one symmetric spaces and their product*, (1997), (prépublication).

[L] F. Ledrappier: *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Sém. de Grenoble, (1994-1995), 97-122.

[O1] J.-P. Otal: *Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative*, Revista matematica Ibero americana, **8:** (1992), no. 3.

[O2] J.-P. Otal: *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Annales of Math. **13:** (1990), 151-162.

[P] M. Peigné: *Aspects stochastiques d'actions de groupes et de semi-groupes*, (habilitation Rennes 1998).

[P-P] W. Parry & M. Pollicott: *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of axiome A flows*, Annales of Math. **118:** (1983), 573-591.

[P-S] M. Pollicott & S. Sharp: *The circle problem on surfaces of variable negative curvature*, Mh. Math. **123:** (1997), 61-70.

[R] J. Rudolph: *Ergodic behavior of Sullivan's geometric measure on a geometicaly finite hyperbolic manifold*, Ergod. Th. Dym. Syst. **2:** (1982), 491-512.

[S-S] R. Schwartz & R. Sharp: *The correlation of length spectra of two hyperbolic surfaces*, Comm. Math. Phys. **153:** (1993), 423-430.

[T] P. Tukia: *On homomorphism of geometricaly finite möbius groups*, Publ. Math. I.H.E.S., **61:** (1985), 171-214.

Françoise Dal'bo
Université Rennes 1,
Campus de Beaulieu
Institut de Mathématiques
35042 Rennes Cedex

E-mail: dalbo@univ-rennes1.fr